Problemes

Una nova secció de problemes per al nou *SCM/Notícies* i, per començar, el nostre agraïment al treball dels lectors que col·laboren amb enunciats i solucions. Moltes gràcies!

Els dos primers problemes, **A73** i **A74**, continuen mostrant que la quantitat de coses que es poden arribar a proposar sobre l'aparentment humil triangle deu ser certament infinita... El tercer, però, és un bonic problema de probabilitats, proposat pel professor V. Diekert. Finalment, el quart, és el producte d'haver llegit malament un altre enunciat, i obtenir-ne un problema molt més bonic (i difícil) que el primitiu!

A l'apartat de solucions publiquem solucions a tres problemes, dues de les quals són de l'estudiant (i olímpic) Xavier Ros, a qui agraïm la seva feina i el seu interès. Les altres dues són de la mateixa redacció.

Finalment, el professor Miguel Àngel Acebo, de la URV, ens va fer notar una debilitat essencial a la solució ja publicada del problema **A68** que ens havia passat per alt i, per causa de la qual, demanem disculpes als nostres soferts lectors. Com a penitència, hem elaborat una solució d'aquest problema, construïda a partir de les observacions que aquest professor ens va fer. I, naturalment, també li donem les gràcies per la seva col·laboració amb el rigor d'aquestes pàgines.

Us recordem que el correu electrònic per als enviaments és cromero@xtec.net i que si escriviu en els formats TEX o LaTEXens feu la feina més agradable i senzilla.

Problemes proposats

A73. (Proposat per la redacció.) Demostreu que, si a, b i c són els costats d'un triangle no degenerat, aleshores

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc\,.$$

A74. (Proposat per la redacció.) Demostreu que un triangle $\triangle ABC$ és rectangle si, i només si,

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

A75. (Proposat per V. Diekert.) En una presó hi ha cent presos condemnats a mort, numerats de l'1 al 100. El director de la presó els ofereix una última possibilitat de salvar-se, que consisteix en això: fa cent paperets amb cadascun dels números de l'1 al 100, i els col·loca aleatòriament dins dels cent calaixos (també numerats de l'1 al 100), un paperet a cada calaix, d'una calaixera que té al seu despatx. Mentrestant els presos són a les seves cel·les, totalment incomunicats del món exterior i entre ells. La prova consisteix en el fet que, per a cada $i=1,\dots,100$, seguirà els cinc passos següents:

1) Cridarà el pres i al seu despatx, tot sol;
2) li deixarà obrir els cinquanta calaixos que ell vulgui;
3) comprovarà si un dels calaixos oberts conté el paperet amb el número i;
4) els tornarà a tancar tots; i
5) tornarà el pres a la seva cel·la sense deixar-lo parlar amb ningú.

La condició que posa és que, si tots els presos obren el calaix amb el seu propi número, aleshores, tots se salven, però, només que un pres falli, tots moren.

Un dels presos, que és matemàtic, de seguida s'adona que el director de la presó els està prenent el pèl. Obrint cinquanta dels cent calaixos a l'atzar, cada pres té probabilitat $1/2$ d'encertar el seu propi número i, per tant, les probabilitats que tot el col·lectiu se salvi són $1/2^{100}$, que és com dir que ja estan morts abans de començar la prova. Després de pensar una mica, fa una sol·licitud al director: «Podria parlar uns minuts amb la resta de presos abans de començar el procés?». El director (conscient que, de tota manera, $1/2^{100}$ és insignificantment petit), accepta i li concedeix uns minuts.

Sabrieu dir en quina estratègia està pensant el pres matemàtic, que aconsegueix augmentar fins a més del 30 % (sí, heu llegit bé, a més de $0,3$!!) la probabilitat que tot el col·lectiu se salvi?

A76. (Proposat per la redacció.) Dues circumferències C_1 i C_2, la primera de radi més gran que la segona, es tallen en els punts A i B. La recta r_1, una de les dues tangents comunes a ambdues circunfèrencies, té els respectius punts de tangència a P i Q, mentre que l'altra tangent comuna, r_2, els té a R i S. Heu de demostrar que els ortocentres dels triangles $\triangle APQ$, $\triangle BPQ$, $\triangle ARS$ i $\triangle BRS$ són els vèrtexs d'un rectangle i heu de determinar la posició relativa dels punts A i B respecte d'aquest rectangle.

Solucions

A67. (Proposat per la redacció.) Trobeu el lloc geomètric dels centres dels triangles equilàters inscrits a l'el·lipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Solució: (Solució de la redacció.) Siguin (m,n) les coordenades del centre del triangle, el qual també és el centre de la circumferència circumscrita que talla l'el·lipse a quatre punts: els tres vèrtexs del triangle i un altre punt de l'el·lipse. Aquest punts són les solucions del sistema:

$$\begin{gathered}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\(x-m)^2+(y-m)^2=r^2\end{gathered}$$

En fer la substitució

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

obtenim l'equació de quart grau

$$\left(a^2-b^2\right)^2x^4-4a^2m\left(a^2-b^2\right)x^3+\cdots=0$$

i si x_1, x_2, x_3 i x_4 en són les arrels, aleshores

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{4a^2m\left(a^2-b^2\right)}{\left(a^2-b^2\right)^2}=\frac{4a^2m}{a^2-b^2}$$

Però, si posem que x_1, x_2 i x_3 són les abscisses del centre del triangle, com que, a més, n'és el baricentre, resulta

$$x_1+x_2+x_3=3m$$

i, per tant,

$$3m+x_4=\frac{4a^2m}{a^2-b^2}$$

o sigui,

$$x_4=\frac{4a^2m}{a^2-b^2}-3m=\frac{\left(a^2+3b^2\right)m}{a^2-b^2}$$

Un càlcul del tot paral·lel dóna

$$y_4=\frac{\left(3a^2+b^2\right)n}{b^2-a^2}$$

i com que el punt (x_4,y_4) és de l'el·lipse,

$$\frac{\left(\frac{(a^2+3b^2)m}{a^2-b^2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{(3a^2+b^2)n}{b^2-a^2}\right)^2}{b^2}=1$$

que dóna

$$\frac{m^2}{\left(\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+3b^2}\right)^2}+\frac{n^2}{\left(\frac{b(b^2-a^2)}{3a^2+b^2}\right)^2}=1$$

que és una el·lipse.

A68. (D'una olimpíada brasilera.) Trobeu totes les solucions enteres i positives de l'equació

$$(m+1)^n-1=m!$$

Solució: (Solució de la redacció, a partir de les observacions de Miguel Angel Acebo, URV.) Si $(m+1)^n=1+m!$, és fàcil veure que $m+1$ ha de ser primer perquè, en el cas contrari, hi hauria un primer, p, que dividiria a 1, cosa impossible. Amb $m+1=2,3,5$ obtenim les solucions:

$$m=n=1\quad m=2\text{ i }n=1\quad m=4\text{ i }n=2$$

Suposem ara que $m>4$. Tenim:

$$\begin{aligned}m!&=(m+1)^n-1=\\&=\big((m+1)-1\big)\big((m+1)^{n-1}\\&\quad+(m+1)^{n-2}+\cdots+(m+1)+1\big)=\\&=m\big((m+1)^{n-1}\\&\quad+(m+1)^{n-2}+\cdots+(m+1)+1\big)\end{aligned}$$

o sigui,

$$(m-1)!=(m+1)^{n-1}+(m+1)^{n-2}+\cdots+(m+1)+1$$

i com que $(m+1)^k \equiv 1 \pmod{m}$

$$(m-1)! \equiv n \pmod{m} \qquad (*)$$

Com que el nombre $m+1$ és primer i més gran que cinc, m ha de ser un nombre parell, o sigui, compost, el qual, com a conseqüència de ser més gran que 4, ha de ser un divisor de $(m-1)!$. Això i la congruència $(*)$ impliquen que m ha de dividir n i, per tant, que $m \leq n$. Però, aleshores,

$$(m+1)^n \geq (m+1)^m > m^m + 1 > m! + 1$$

que és una contradicció. En conseqüència, les úniques solucions de l'equació proposada són les que s'obtenen de $m = 1, 2, 4$ ja descrites.

Aquesta resulta ser, doncs, una demostració elemental d'un teorema de Liouville que diu que si p és un primer més gran que 5, aleshores $(p-1)! + 1$ no és l'n-èssima potència de p, per a cap nombre natural n.

A69. (Proposat a l'Olimpíada Matemàtica Internacional, Atenes, 12 de Juliol de 2004.) El triangle $\triangle ABC$ és un triangle acutangle amb $AB \neq AC$. El cercle de diàmetre BC talla els costats AB i AC respectivament en els punts M i N. El punt O és el punt mitjà del costat BC. Les bisectrius dels angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{MON}$ es tallen en el punt R. Cal demostrar que les circumferències circumscrites als triangles $\triangle BMR$ i $\triangle CNR$ tenen un punt comú al segment BC.

Solució: (Solució de Xavier Ros, estudiant a la FME de la UPC.) Siguin $A = \widehat{BAC}$, $B = \widehat{ABC}$ i $C = \widehat{ACB}$. Com que $OM = ON = OB = OC$, els triangles $\triangle OBM$, $\triangle OCN$ i $\triangle OMN$ són isòsceles i $\widehat{OMB} = B$, $\widehat{ONC} = C$ i $\widehat{MON} = 180° - 2A$. A més, $\widehat{OMN} = \widehat{ONM} = A$ i OR talla perpendicularment MN del qual és la mediatriu.

Si tenim en compte que $\widehat{OMB} = B$ i $\widehat{OMN} = A$, aleshores $\widehat{AMN} = C$. D'altra banda, R és el punt de tall de la bisectriu de l'angle A amb la mediatriu de MN i, com que la bisectriu de l'angle A talla l'arc MN de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle AMN$ en el seu punt mitjà, és clar que R és aquest punt, cosa que implica que $AMRN$ és un quadrilàter cíclic. Per tant,

$$\widehat{NMR} = \widehat{NAR} = \frac{A}{2}$$

és a dir,

$$\widehat{RMO} = \widehat{NMO} - \widehat{NMR} = \frac{A}{2}$$

i

$$\widehat{RMB} = B + \frac{A}{2}$$

Sigui P el punt de tall de AR i BC. En el triangle $\triangle APB$ es compleix que

$$\widehat{APB} = \widehat{RPB} = 180° - \left(B + \frac{A}{2}\right)$$

i

$$\widehat{RMB} = B + \frac{A}{2}$$

i això implica que

$$\widehat{RMB} + \widehat{RPB} = 180°$$

és a dir, que $PRMB$ és un quadrilàter cíclic.

De la mateixa manera, $PRNC$ també és un quadrilàter cíclic i, per tant, P està sobre les circumferències circumscrites als triangles $\triangle BMR$ i $\triangle CNR$ i, per tant, les dues circumferències es tallen sobre BC.

A70. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC.) Siguin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ els vèrtexs d'un polígon convex i sigui M qualsevol punt interior al polígon. Si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ són les projeccions respectives del punt M sobre els costats $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, proveu que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{A_kA_{k+1}}^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{A_kM_k}^2\right) \geq \frac{n^2}{4}$$

amb el benentès que $A_{n+1} = A_1$.

Solució: (Solució de Xavier Ros, estudiant a la FME de la UPC.) Com que

$$\overline{A_kM_k}^2 + \overline{M_kM}^2 = \overline{MA_k}^2$$

i

$$\overline{M_{k-1}A_k}^2 + \overline{MM_{k-1}}^2 = \overline{MA_k}^2$$

aleshores,

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{A_kM_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} \overline{M_kA_{k+1}}^2 \qquad (*)$$

D'altra banda, si apliquem la desigualtat de Cauchy, obtenim que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{A_kA_{k+1}}^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{A_kM_k}^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{A_kM_k}}{\overline{A_kA_{k+1}}}\right)^2$$

i, a més, si fem servir (∗) i, novament, la desigualtat de Cauchy, obtenim:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{A_kA_{k+1}}^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{A_kM_k}^2\right) \\
&\quad= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{A_kA_{k+1}}^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{M_kA_{k+1}}^2\right) \\
&\quad\geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{M_kA_{k+1}}}{\overline{A_kA_{k+1}}}\right)^2
\end{aligned}$$

Però, com que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{A_kM_k}}{\overline{A_kA_{k+1}}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{M_kA_{k+1}}}{\overline{A_kA_{k+1}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{A_kA_{k+1}}}{\overline{A_kA_{k+1}}} = n$$

aleshores un dels dos sumands de l'esquerra ha de ser més gran o igual que $\frac{n}{2}$ i, per tant,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{A_kA_{k+1}}^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{A_kM_k}^2\right) \geq \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$$

com volem demostrar.

Observem que la igualtat es verifica si, i només si, M_k és el punt mitjà de A_kA_{k+1} per tot k.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

- Mercè Claverol Aguas va llegir la seva tesi, dirigida per Ferran Hurtado Díaz i Manuel Abellanas Oar, titulada *Problemas geométricos en morfología computacional*, el dia 16 de novembre de 2004. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada IV de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Aquesta tesi es divideix en dues parts. La primera part conté l'estudi de tres pesos o profunditats, associats a conjunts finits de punts en el pla: el pes definit per les capes convexes, *convex depth* (introduït per Hubert, 1972, i Barnett, 1976), la separabilitat lineal, també coneguda com *location, halfspace o Tukey depth* (Tukey, 1975) i el pes Delaunay. De la noció de pes, s'obté una estratificació dels conjunts de punts en el pla en capes i una partició del pla en regions o nivells. Les fronteres dels nivells són conegudes per *depth contours*. Es defineixen els conceptes de *capa* i *nivell* en els tres pesos assenyalats i s'estudien propietats i complexitats. Chazelle va obtenir un algorisme per calcular en temps òptim les capes convexes, que coincideixen amb les fronteres dels nivells convexos. En aquesta tesi, per als pesos de separabilitat lineal i Delaunay, es proporcionen algorismes d'obtenció, tant de capes com de nivells, i de càlcul del pes d'un punt nou que s'incorpori al conjunt donat. De manera independent, han estat obtinguts pel pes de la separabilitat lineal els algorismes de construcció dels nivells, *location depth contours*, i el de càlcul del pes d'un punt nou, per Miller *et al.* (2001).

Per als tres pesos mencionats, s'analitzen arbres generadors, poligonitzacions o triangulacions, amb pes mínim, on el pes s'ha considerat com la suma dels pesos de les arestes de tals estructures. S'obtenen propietats generals entorn de la caracterització d'aquestes estructures i algorismes d'obtenció per a alguna d'elles.

Es defineixen dos pesos relacionats amb la separabilitat mitjançant cunyes: el pes segons dominació isotètica i la separabilitat α. En ambdós, es donen algorismes per al càlcul dels pesos dels punts d'un conjunt donat. La separabilitat α està estretament relacionada amb l'enumeració eficient de (α, k)-sets. Es realitza